

E.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Η συνεπαγωγή

Έστω P, Q δύο ισχυρισμοί (προτάσεις).

Η πρόταση $P \Rightarrow Q$ σημαίνει ότι, όταν αληθεύει (ισχύει) ο ισχυρισμός P , θα αληθεύει (ισχύει) και ο Q .

Το σύμβολο « \Rightarrow » διαβάζεται : άρα – τότε – συνεπάγεται.

2.

Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Έστω P, Q δύο ισχυρισμοί (προτάσεις).

Η πρόταση $P \Leftrightarrow Q$ σημαίνει ότι, όταν αληθεύει (ισχύει) ο ισχυρισμός P , θα αληθεύει (ισχύει) και ο Q , και αντίστροφα

Το σύμβολο « \Leftrightarrow » διαβάζεται : πρέπει και αρκεί
τότε και μόνο τότε
αν και μόνο αν
ισοδυναμεί
συνεπάγεται και αντίστροφα

3.

Το διαζευκτικό «ή»

Έστω P, Q δύο ισχυρισμοί (προτάσεις).

Η πρόταση « P ή Q » σημαίνει ότι αληθεύει (ισχύει) ένας τουλάχιστον από τους P, Q .

4.

Το συμπλεκτικό «και»

Έστω P, Q δύο ισχυρισμοί (προτάσεις).

Η πρόταση « P και Q » σημαίνει ότι αληθεύει (ισχύει) και ο P και ο Q .

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Η χρήση του « \Rightarrow »

Το σύμβολο « \Rightarrow » τοποθετείται μεταξύ δύο προτάσεων, όταν από την πρώτη συμπεραίνουμε τη δεύτερη.

2.

Η χρήση του « \Leftrightarrow »

Το σύμβολο « \Leftrightarrow » τοποθετείται μεταξύ δύο προτάσεων, όταν από την πρώτη συμπεραίνουμε τη δεύτερη, αλλά και από τη δεύτερη συμπεραίνουμε την πρώτη.

3.

Η ισοδυναμία σαν διπλή συνεπαγωγή

Κάθε ισοδυναμία δημιουργείται από δύο συνεπαγωγές, την \Rightarrow (Ευθύ) και την \Leftarrow (αντίστροφο)

4.

Η χρήση του «ή»

Το «ή» τοποθετείται μεταξύ δύο ή περισσότερων προτάσεων όταν αληθεύει μία τουλάχιστον από αυτές.

5.

Η χρήση του «και»

Το «και» τοποθετείται μεταξύ δύο ή περισσότερων προτάσεων όταν αληθεύουν όλες οι προτάσεις.

6.

Η άρνηση των «ή», «και»

Η άρνηση του «ή» είναι το «και»

Η άρνηση του «και» είναι το «ή»

7.

Η άρνηση των «κάθε», «ένα τουλάχιστον»

Η άρνηση του «κάθε» είναι το «ένα τουλάχιστον»

Η άρνηση του «ένα τουλάχιστον» είναι το «κάθε»

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνονται οι προτάσεις P : το βράδυ πάω θέατρο
 Q : χρειάζομαι 25 €

Να διατυπώσετε τη συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$ και τη συνεπαγωγή $Q \Rightarrow P$
 Η συνεπαγωγή $Q \Rightarrow P$, σαν πρόταση, είναι αληθής ;

Απάντηση

$P \Rightarrow Q$: αν το βράδυ πάω θέατρο τότε χρειάζομαι 25 €

Σχόλιο 1

$Q \Rightarrow P$: αν χρειάζομαι 25 € τότε το βράδυ πάω θέατρο.

Η συνεπαγωγή $Q \Rightarrow P$ δεν είναι αληθής, αφού αν χρειάζομαι 25 € δε συμπεραίνεται ότι θα πάω οπωσδήποτε στο θέατρο.

2.

Δίνονται οι προτάσεις P : $x = 3$
 Q : $x^2 = 9$

Να διατυπώσετε τη συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$ και τη συνεπαγωγή $Q \Rightarrow P$
 Η συνεπαγωγή $Q \Rightarrow P$, σαν πρόταση, είναι αληθής ;

Απάντηση

$P \Rightarrow Q$: $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$

$Q \Rightarrow P$: $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

Η συνεπαγωγή $Q \Rightarrow P$ δεν είναι αληθής, αφού όταν ισχύει $x^2 = 9$, τότε $x = 3$ ή $x = -3$

3.

Δίνονται οι προτάσεις P : έρχομαι στο ραντεβού μας
 Q : προλαβαίνω το λεωφορείο

Σχόλιο 3

i) Να διατυπώσετε την ισοδυναμία $P \Leftrightarrow Q$

ii) Να διασπάσετε την παραπάνω ισοδυναμία με δύο συνεπαγωγές.

Απάντηση

i)

Έρχομαι στο ραντεβού μας αν και μόνο αν προλαβαίνω το λεωφορείο

ii)

Αν έρχομαι στο ραντεβού μας τότε προλαβαίνω το λεωφορείο

Αν προλαβαίνω το λεωφορείο τότε έρχομαι στο ραντεβού μας

4.

Δίνονται οι προτάσεις P : Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές
Q : Το τρίγωνο ABΓ έχει δύο γωνίες ίσες

- i) Να διατυπώσετε την ισοδυναμία $P \Leftrightarrow Q$
ii) Να διασπάσετε την παραπάνω ισοδυναμία με δύο συνεπαγωγές.

Απάντηση

i)

Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές αν και μόνο αν το τρίγωνο ABΓ έχει δύο γωνίες ίσες

ii)

Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές τότε έχει δύο γωνίες ίσες
Αν το τρίγωνο ABΓ έχει δύο γωνίες ίσες τότε είναι ισοσκελές

5.

Δίνονται οι προτάσεις P : $3x > 12$
Q : $x > 4$

- i) Να διατυπώσετε την ισοδυναμία $P \Leftrightarrow Q$
ii) Να διασπάσετε την παραπάνω ισοδυναμία με δύο συνεπαγωγές.

Απάντηση

i)

$$3x > 12 \Leftrightarrow x > 4$$

ii)

$$3x > 12 \Rightarrow x > 4 \quad \text{και} \quad x > 4 \Rightarrow 3x > 12$$

6.

Η έκφραση “ο Γιώργος είναι καλός μαθητής ή καλός ποδοσφαιριστής” τι σημαίνει ότι ισχύει

- i) μόνο καλός μαθητής ;
ii) μόνο καλός ποδοσφαιριστής ;
iii) και καλός μαθητής και καλός ποδοσφαιριστής ;

Απάντηση

Μπορεί να ισχύει μόνο καλός μαθητής,
μπορεί μόνο καλός ποδοσφαιριστής,
μπορεί και τα δύο,
δηλαδή ένα τουλάχιστον από τα δύο.

Σχόλιο 4

7.

Η έκφραση “ $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ” τι σημαίνει ότι ισχύει

- i) μόνο $\alpha = 0$;
ii) μόνο $\beta = 0$;
iii) και $\alpha = 0$ και $\beta = 0$;

Απάντηση

Μπορεί να ισχύει μόνο $\alpha = 0$, μπορεί μόνο $\beta = 0$, μπορεί και τα δύο, δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους α , β είναι 0.

8.

Η έκφραση “ο Γιώργος είναι καλός μαθητής και καλός ποδοσφαιριστής” τι

- σημαίνει ότι ισχύει
- i) μόνο καλός μαθητής ;
 - ii) μόνο καλός ποδοσφαιριστής ;
 - iii) καλός μαθητής και καλός ποδοσφαιριστής ;

Απάντηση

Ισχύει μόνο, καλός μαθητής και καλός ποδοσφαιριστής.

Σχόλιο 5

9.

Η έκφραση “ $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ ” σημαίνει ότι ισχύει

- i) μόνο $\alpha = 0$;
- ii) μόνο $\beta = 0$;
- iii) $\alpha = 0$ και $\beta = 0$;

Απάντηση

Σημαίνει ότι ισχύει $\alpha = 0$ και $\beta = 0$

10.

Η έκφραση $x \geq 2$, σημαίνει ότι

- i) $x > 2$ ή $x = 2$;
- ii) $x > 2$ και $x = 2$;

Απάντηση

Σημαίνει ότι $x > 2$ ή $x = 2$

11.

Διατυπώστε τις αρνήσεις των παρακάτω προτάσεων :

- i) Ο Πέτρος έχει μπλε μάτια.
- ii) Ο Πέτρος και η Μαρία έχουν μπλε μάτια
- iii) Ο Πέτρος ή η Μαρία έχει μπλε μάτια

Απάντηση

- i) Ο Πέτρος δεν έχει μπλε μάτια
- ii) Ο Πέτρος ή η Μαρία δεν έχει μπλε μάτια
- iii) Ο Πέτρος και η Μαρία δεν έχουν μπλε μάτια

Σχόλιο 6

12.

Διατυπώστε την άρνηση κάθε μιας από τις παρακάτω προτάσεις :

- i) $\alpha = 0$.
- ii) $\alpha = 0$ και $\beta = 0$
- iii) $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

Απάντηση

- i)
α δεν ισούται 0, δηλαδή $\alpha \neq 0$
- ii)
 $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$
- iii)
 $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

Σχόλιο 6

13.

Διατυπώστε την άρνηση κάθε μιας από τις παρακάτω προτάσεις :

- i) Κάθε παιδί της τάξης μας φοράει σκουλαρίκια
- ii) Ένα τουλάχιστον παιδί της τάξης μας φοράει σκουλαρίκια

Απάντηση

- i)
Ένα τουλάχιστον παιδί της τάξης μας δε φοράει σκουλαρίκια
- ii)
Κάθε παιδί της τάξης μας δε φοράει σκουλαρίκια

Σχόλιο 7

14.

Διατυπώστε την άρνηση κάθε μιας από τις παρακάτω προτάσεις :

- i) Κάθε αριθμός από τους α , β , γ είναι ίσος μηδέν
- ii) Ένας τουλάχιστον αριθμός από τους α , β , γ είναι ίσος μηδέν

Απάντηση

- i)
Ένας τουλάχιστον αριθμός από τους α , β , γ είναι διάφορος μηδέν
- ii)
Κάθε αριθμός από τους α , β , γ είναι διάφορος μηδέν

Σχόλιο 7