7.1 – 7.6
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 150 – 151

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.
Να ορίσετε τους παρακάτω λόγους

i) Της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου προς την αντίστοιχη διάμεσο

ii) Μίας εγγεγραμμένης γωνίας προς την αντίστοιχη επίκεντρη

iii) Της διαμέτρου ενός κύκλου προς την ακτίνα του

iv) Μίας ορθής γωνίας προς μία γωνία ισοπλεύρου τριγώνου

Απάντηση

i) Αν α = υποτείνουσα και μ_α αντίστοιχη διάμεσος, τότε $\dfrac{\alpha}{\mu_\alpha}=\dfrac{\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2$

ii) Αν $\hat{\phi}$ η εγγεγραμμένη και $\hat{\omega}$ η αντίστοιχη επίκεντρη τότε : $\dfrac{\hat{\phi}}{\hat{\omega}}=\dfrac{\frac{\hat{\omega}}{2}}{\hat{\omega}}=\dfrac{1}{2}$

iii) Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου τότε : $\dfrac{2\rho}{\rho}=2$

iv) $\dfrac{90^o}{60^o}=\dfrac{3}{2}$

2.
Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 10α και ΑΓ = 2α .

Να βρεθούν οι λόγοι

i) ΑΒ προς ΑΓ , **ii)** ΑΓ προς ΑΒ , **iii)** ΒΓ προς ΑΒ , **iv)** ΑΓ προς ΒΓ

Απάντηση

i) $\dfrac{AB}{A\Gamma}=\dfrac{10\alpha}{2\alpha}=5$ **ii)** $\dfrac{A\Gamma}{AB}=\dfrac{2\alpha}{10\alpha}=\dfrac{1}{5}$

iii) $\dfrac{B\Gamma}{AB}=\dfrac{8\alpha}{10\alpha}=\dfrac{4}{5}$ **iv)** $\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}=\dfrac{2\alpha}{8\alpha}=\dfrac{1}{4}$

3.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο του Γ έτσι ώστε $\frac{ΑΓ}{ΓΒ}=\frac{1}{2}$

τότε ο λόγος $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$ είναι :

i) 2 **ii)** 3 **iii)** $\frac{3}{2}$ **iv** $\frac{2}{3}$ **v)** Τίποτα από αυτά

Απάντηση

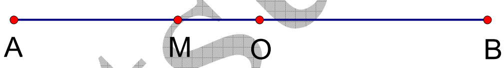
$$\frac{ΑΓ}{ΓΒ}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ΑΓ+ΓΒ}{ΓΒ}=\frac{1+2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{ΑΒ}{ΓΒ}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{ΒΓ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$$

Σωστή απάντηση η (iv)

4.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 12cm και το μέσο του Ο . Να βρεθεί σημείο Μ του ΟΑ ώστε τα σημεία Μ και Β να διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά αντίστοιχα το ΑΟ στον ίδιο λόγο



Απάντηση

Πρέπει να ισχύει

$$\frac{ΒΑ}{ΒΟ}=\frac{ΜΑ}{ΜΟ} \Leftrightarrow \frac{12}{6}=\frac{ΜΑ}{ΜΟ}$$

$$\frac{ΜΑ}{ΜΟ}=2$$

$$\frac{ΜΑ}{ΜΟ+ΜΑ}=\frac{2}{1+2}$$

$$\frac{ΜΑ}{ΟΑ}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow ΜΑ = 4 \text{ cm} \quad \text{οπότε εντοπίζεται το σημείο Μ}$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 3, 2. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου σε μοίρες.

Λύση

Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο.

$$\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \lambda \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\hat{A}}{4} = \lambda \\ \dfrac{\hat{B}}{3} = \lambda \\ \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} = \lambda \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \hat{A} = 4\lambda \\ \hat{B} = 3\lambda \\ \hat{\Gamma} = 2\lambda \end{cases}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \;\Rightarrow\; 4\lambda + 3\lambda + 2\lambda = 180^o \;\Rightarrow\; 9\lambda = 180^o \;\Rightarrow\; \lambda = 20^o$$

Άρα $\begin{cases} \hat{A} = 4\cdot 20^o \\ \hat{B} = 3\cdot 20^o \\ \hat{\Gamma} = 2\cdot 20^o \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \hat{A} = 80^o \\ \hat{B} = 60^o \\ \hat{\Gamma} = 40^o \end{cases}$

2.

Ο λόγος μιας γωνίας ω προς την παραπληρωματική της είναι $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η γωνία ω.

Λύση

$$\frac{\omega}{180-\omega} = \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; 3\omega = 180 - \omega \;\Leftrightarrow\; 4\omega = 180 \;\Leftrightarrow\; \omega = 45^o$$

3.

Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του.

Λύση

Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο.

$$\frac{\alpha}{6} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = \lambda \;\Rightarrow\; \alpha = 6\lambda,\;\; \beta = 3\lambda,\;\; \gamma = 4\lambda$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 65 \;\Leftrightarrow\; 6\lambda + 3\lambda + 4\lambda = 65 \;\Leftrightarrow\; 13\lambda = 65 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 5$$

Άρα $\alpha = 6\cdot 5 = 30,\quad \beta = 3\cdot 5 = 15,\quad \gamma = 4\cdot 5 = 20$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4. Να υπολογισθούν οι εσωτερικές του γωνίες.

Λύση

Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο.

$$\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \frac{\hat{B}_{\varepsilon\xi}}{3} = \frac{\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{4} = \lambda \quad \Rightarrow \hat{A}_{\varepsilon\xi} = 2\lambda, \quad \hat{B}_{\varepsilon\xi} = 3\lambda, \quad \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 4\lambda$$

$$\hat{A}_{\varepsilon\xi} + \hat{B}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\lambda + 3\lambda + 4\lambda \quad \Rightarrow$$

$$180 - \hat{A} + 180 - \hat{B} + 180 - \hat{\Gamma} = 9\lambda \quad \Rightarrow$$

$$540 - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}) = 9\lambda \quad \Rightarrow$$

$$540 - 180 = 9\lambda \quad \Rightarrow$$

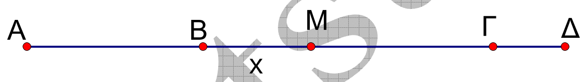
$$360 = 9\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 40$$

Άρα $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 2 \cdot 40 = 80^o$, $\quad \hat{B}_{\varepsilon\xi} = 3 \cdot 40 = 120^o$, $\quad \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 4 \cdot 40 = 160^o$

2.

Σε ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε ΑΒ = 6cm. ΒΓ = 12cm, ΓΔ = 2cm. Να βρεθεί σημείο Μ του ΒΓ, το οποίο διαιρεί εσωτερικά τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ στον ίδιο λόγο.

Λύση



Θεωρούμε άγνωστο το τμήμα ΜΒ = x, οπότε ΜΓ = 12 – x.

$$\frac{MA}{M\Delta} = \frac{MB}{M\Gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+6}{12-x+2} = \frac{x}{12-x}$$

$$\frac{x+6}{14-x} = \frac{x}{12-x}$$

$$12x - x^2 + 72 - 6x = 14x - x^2$$

$$-8x = -72 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9$$

3.

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των αναλογιών, να διαιρέσετε δοσμένο τμήμα $AB = \alpha$ σε δύο τμήματα, τα οποία έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.

Λύση

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{MA}{MB + MA} = \frac{3}{4+3}$$

$$\frac{MA}{AB} = \frac{3}{7}$$

$$MA = \frac{6}{7}\alpha .$$