

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^y = a$

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^y = a$

- Όταν $a > 0$: Για n άρτιο, είναι $x = \sqrt[n]{a}$ ή $x = -\sqrt[n]{a}$
Π.χ $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ή $x = -\sqrt{5}$

Για n περιττό, είναι $x = \sqrt[n]{a}$
Π.χ $x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$

- Όταν $a < 0$: Για n άρτιο, η εξίσωση είναι αδύνατη
Π.χ $x^2 = -5$ αδύνατη

Για n περιττό, είναι $x = -\sqrt[n]{|a|}$
Π.χ $x^3 = -5 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-5|} = -\sqrt[3]{5}$

2.

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^y = a^y$, με $a > 0$

Για n άρτιο, είναι $x = a$ ή $x = -a$

Π.χ $x^2 = 5^2 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

Για n περιττό, είναι $x = a$

Π.χ $x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 5$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Φτιάξε μια δική σου εξίσωση της μορφής $x^v = a$ και λύστην, με

- i) $a > 0$ και v περιττό
- ii) $a > 0$ και v άρτιο
- iii) $a < 0$ και v περιττό
- iv) $a < 0$ και v άρτιο

Λύση

- i) $x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$
- ii) $x^4 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{5}$ ή $x = -\sqrt[4]{5}$
- iii) $x^3 = -5 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-5|} = -\sqrt[3]{5}$
- iv) $x^4 = -5$ αδύνατη

2.

Φτιάξε μια δική σου εξίσωση της μορφής $x^v = a^v$ και λύστην, με $a > 0$ και

- i) v περιττό
- ii) v άρτιο

Λύση

- i) $x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 5$
- ii) $x^4 = 5^4 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

3.

Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - x^3 - 2x + 2 = 0$

Λύση

$$\begin{aligned}
 x^4 - x^3 - 2x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x^3(x-1) - 2(x-1) = 0 \\
 &(x-1)(x^3 - 2) = 0 \\
 x-1 = 0 &\text{ ή } x^3 - 2 = 0 \\
 x = 1 &\text{ ή } x^3 = 2 \\
 x = 1 &\text{ ή } x = \sqrt[3]{2}
 \end{aligned}$$

4.

Να λύσετε την εξίσωση $(x^3 + 25)^3 + 8 = 0$

Λύση

$$(x^3 + 25)^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 25)^3 = -8$$

$$x^3 + 25 = -\sqrt[3]{-8}$$

$$x^3 + 25 = -\sqrt[3]{8}$$

$$x^3 + 25 = -2$$

$$x^3 = -27 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{-27}$$

$$x = -\sqrt[3]{27}$$

$$x = -3$$

Φανταζόμαστε το
 $x^3 + 25$ σαν x

5.

Να λύσετε την εξίσωση $(x^3 + 29)^3 - 8 = 0$

Λύση

$$(x^3 + 29)^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 29)^3 = 8$$

$$x^3 + 29 = \sqrt[3]{8}$$

$$x^3 + 29 = 2$$

$$x^3 = -27 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{-27}$$

$$x = -\sqrt[3]{27}$$

$$x = -3$$

Φανταζόμαστε το
 $x^3 + 29$ σαν x

6.

Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)^6 - 16(x-1)^2 = 0$

Λύση

$$(x-1)^6 - 16(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 [(x-1)^4 - 16] = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad (x-1)^4 - 16 = 0$$

$$x-1 = 0 \quad \text{ή} \quad (x-1)^4 = 16$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad (x-1)^4 = 2^4$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x-1 = 2 \quad \text{ή} \quad x-1 = -2$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

Φανταζόμαστε το
 $x-1$ σαν x