

4.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Επανάληψη στο πρόσημο τριωνύμου

Το τριώνυμο είναι ετερόσημο του a μόνο όταν $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

2.

Το γινόμενο $(x - x_1)(x - x_2)$ είναι τριώνυμο με $a = 1$ και ρίζες x_1, x_2 .

3.

Θυμόμαστε την ισοδυναμία : $\frac{\alpha}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \alpha\beta > 0$

4.

Απαλοιφή παρανομαστών σε ανίσωση.

Μόνο όταν $E.K.\Pi > 0$.

5.

Διαγραφή παράγοντα στα δύο μέλη ανίσωσης.

- Όταν ο παράγοντας είναι θετικός, η φορά παραμένει.
- Όταν ο παράγοντας είναι αρνητικός, η φορά αλλάζει.

6.

Προσοχή στο λάθος : $x^2 < \alpha^2 \Leftrightarrow x < \alpha$

Το σωστό είναι : $x^2 < \alpha^2 \Leftrightarrow |x| < |\alpha| \Leftrightarrow -|\alpha| < x < |\alpha|$

7.

Προσοχή στο λάθος : $x^2 > \alpha^2 \Leftrightarrow x > \alpha$

Το σωστό είναι : $x^2 > \alpha^2 \Leftrightarrow |x| > |\alpha| \Leftrightarrow x < -|\alpha| \text{ ή } x > |\alpha|$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να λύσετε την ανίσωση $(x - 1)(x - 4) < 0$

Προτεινόμενη λύση

$$(x - 1)(x - 4) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$$

Σχόλιο 2

2.

Να λύσετε την ανίσωση $(x - 1)(x - 4) > 0$

Προτεινόμενη λύση

$$(x - 1)(x - 4) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 4$$

Σχόλιο 2

3.

Να λύσετε την ανίσωση $(x + 1)(x - 4) < 0$

Προτεινόμενη λύση

$$(x + 1)(x - 4) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4$$

Σχόλιο 2

4.

Να λύσετε την ανίσωση $(2x - 1)(x - 4) < 0$

Προτεινόμενη λύση

$$(2x - 1)(x - 4) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 4$$

Σχόλιο 2

5.

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x+3}{x^2+1} < 2$

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Ε.Κ.Π} = x^2 + 1 > 0$$

$$\frac{x+3}{x^2+1} < 2 \Leftrightarrow x+3 < 2(x^2+1)$$

$$x+3 < 2x^2+2$$

$$2x^2 - x - 1 > 0 \quad \mathbf{(1)}$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \quad \text{Ρίζες του τριωνύμου : } \frac{1 \pm 3}{4} = 1 \quad \text{ή} \quad -\frac{1}{2}$$

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x > 1$$

Σχόλιο 4

6.

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x+3}{x^2-3x-4} > 0$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός: Ε.Κ.Π = $x^2 - 3x - 4 \neq 0$

$$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0 \quad \text{Ρίζες} \quad \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \quad \text{ή} \quad -1$$

$$x \neq 4 \quad \text{και} \quad x \neq -1$$

$$\frac{x+3}{x^2-3x-4} > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2-3x-4) > 0 \quad (1)$$

- $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$
- $x^2-3x-4 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 4$

Πίνακας προσήμου

x	$-\infty$	-3	-1	4	$+\infty$
x+3	-	0	+	+	+
x^2-3x-4	+	+	-	-	+
Γινόμενο	-	0	+	-	+

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow -3 < x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 4$$

7.

Να λύσετε την ανίσωση $(x^2-4)(x^2+x+1) < 0$

Προτεινόμενη λύση

$$\bullet \quad x^2-4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Σχόλιο 6

$$\bullet \quad \text{Για το τριώνυμο} \quad x^2+x+1$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$\text{Άρα} \quad x^2+x+1 > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Οπότε} \quad (x^2-4)(x^2+x+1) < 0 \Leftrightarrow x^2-4 < 0$$

$$-2 < x < 2$$

Σχόλιο 5

8.

Να λύσετε την ανίσωση $(x^2 - 4)(-x^2 + x - 1) < 0$

Προτεινόμενη λύση

• $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2$

Σχόλιο 7

• Για το τριώνυμο $-x^2 + x - 1$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

Άρα $-x^2 + x - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε $(x^2 - 4)(-x^2 + x - 1) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$

$$x < -2 \text{ ή } x > 2$$

Σχόλιο 5

9.

Να λύσετε την ανίσωση $(x^2 + 5x - 6)^2 \geq 4(x^2 - 4x + 3)^2$

Προτεινόμενη λύση

Καταρχήν παραγοντοποιούμε.

• Για το τριώνυμο $x^2 + 5x - 6$

$$\Delta = 25 + 24 = 49 > 0$$

Ρίζες $\frac{-5 \pm 7}{2} = 1 \text{ ή } -6$

Άρα $x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$

• Για το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$

$$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$$

Ρίζες $\frac{4 \pm 2}{2} = 1 \text{ ή } 3$

Άρα $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

Η ανίσωση γίνεται $[(x - 1)(x + 6)]^2 \geq 4[(x - 1)(x - 3)]^2$

$$(x - 1)^2(x + 6)^2 - 4(x - 1)^2(x - 3)^2 \geq 0$$

$$(x - 1)^2 [(x + 6)^2 - 4(x - 3)^2] \geq 0$$

Σχόλιο 5

$$(x - 1)^2 = 0 \text{ ή } (x + 6)^2 - 4(x - 3)^2 \geq 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 + 12x + 36 - 4(x^2 - 6x + 9) \geq 0$$

$$x = 1 \text{ ή } x^2 + 12x + 36 - 4x^2 + 24x - 36 \geq 0$$

$$x = 1 \text{ ή } -3x^2 + 36x \geq 0$$

$$x = 1 \text{ ή } x^2 - 12x \leq 0$$

$$x = 1 \text{ ή } x(x - 12) \leq 0$$

$$x = 1 \text{ ή } 0 \leq x \leq 12$$

$$0 \leq x \leq 12$$

Σχόλιο 2

10.

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+3} \geq 1$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός: $x-2 \neq 0$ και $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq -3$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+3} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+3} - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+3+x(x-2)-(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+3+x^2-2x-x^2-3x+2x+6}{(x-2)(x+3)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x+9}{(x-2)(x+3)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (-2x+9)(x-2)(x+3) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Σχόλιο 3

- $-2x+9 > 0 \Leftrightarrow x < 9/2$
- $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
- $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

Πίνακας προσήμου

x	$-\infty$	-3	2	9/2	$+\infty$	
-2x+9		+	+	0	-	
x-2		-	-	+	+	
x+3		-	+	+	+	
Γινόμενο		+	-	+	0	-

Η (1) $\Leftrightarrow x < -3$ ή $2 < x \leq \frac{9}{2}$

11.

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{6} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} < \frac{1}{x + 2}$

Προτεινόμενη λύση

Το τριώνυμο $x^2 + 3x + 2$ γράφεται $(x + 1)(x + 2)$

Περιορισμός: $(x + 1)(x + 2) \neq 0 \Leftrightarrow x + 1 \neq 0$ και $x + 2 \neq 0$
 $x \neq -1$ και $x \neq -2$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} < \frac{1}{x + 2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} - \frac{1}{x + 2} < 0$$

$$\frac{(x + 1)(x + 2) + 6 - 6(x + 1)}{6(x + 1)(x + 2)} < 0$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2 + 6 - 6x - 6}{6(x + 1)(x + 2)} < 0$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{6(x + 1)(x + 2)} < 0$$

$$(x^2 - 3x + 2) 6(x + 1)(x + 2) < 0$$

$$(x^2 - 3x + 2)(x + 1)(x + 2) < 0 \quad (1)$$

Σχόλιο 5

- $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ή $x > 2$ (οι ρίζες του τριωνύμου είναι 1, 2)
- $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
- $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Πίνακας προσήμου

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$		
$x^2 - 3x + 2$		+	+	+	0	-	0	+
$x + 1$		-	-	+	+	+	+	+
$x + 2$		-	+	+	+	+	+	+
Γινόμενο		+	-	+	0	-	0	+

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow -2 < x < -1 \quad \text{ή} \quad 1 < x < 2$$

12.

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x+1}{x^2+x-2} \leq \frac{x}{x^2-1}$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός: $x^2+x-2 \neq 0$ και $x^2-1 \neq 0$
 $(x-1)(x+2) \neq 0$ και $(x-1)(x+1) \neq 0$
 $x-1 \neq 0$ και $x+2 \neq 0$ και $x-1 \neq 0$ και $x+1 \neq 0$
 $x \neq 1$ και $x \neq -2$ και $x \neq -1$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2+x-2} \leq \frac{x}{x^2-1} &\Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} - \frac{x}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \\ &\frac{(x+1)^2 - x(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+1)} \leq 0 \\ &\frac{x^2+2x+1-x^2-2x}{(x-1)(x+2)(x+1)} \leq 0 \\ &\frac{1}{(x-1)(x+2)(x+1)} \leq 0 \\ &(x-1)(x+2)(x+1) \leq 0 \quad \mathbf{(1)} \end{aligned}$$

Πίνακας προσήμου

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
x-1		-	-	-	+
x+2		-	+	+	+
x+1		-	-	+	+
Γινόμενο		-	+	-	+

Η (1) $\Leftrightarrow x < -2$ ή $-1 < x < 1$