3.10 – 3.12

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο

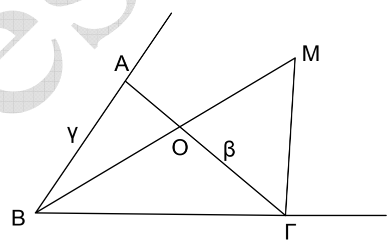
- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές.
- Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται άνισες γωνίες και αντίστροφα.
- **Τριγωνική ανισότητα :** $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ (υποτίθεται $\beta > \gamma$)
- Αν δύο τρίγωνα έχουν $\beta = \beta'$ και $\gamma = \gamma'$, θα ισχύει η ισοδυναμία

$$\hat{A} > \hat{A}' \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \alpha'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Έστω σημείο Μ εξωτερικό τριγώνου ΑΒΓ και εσωτερικό της γωνίας Β.
Δείξτε ότι $\beta + MB > \gamma + M\Gamma$.



Προτεινόμενη λύση

Έστω Ο η τομή των ΜΒ , ΑΓ.

Στο τρίγωνο ΟΑΒ : $\gamma < OA + OB$

Στο τρίγωνο ΟΜΓ : $M\Gamma < OM + O\Gamma$

Προσθέτουμε κατά μέλη : $\gamma + M\Gamma < OA + OB + OM + O\Gamma$

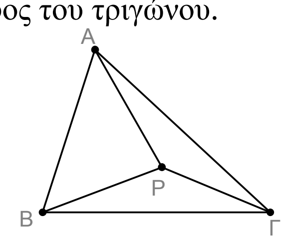
$$\gamma + M\Gamma < (OA + O\Gamma) + (OM + OB)$$

$$\gamma + M\Gamma < A\Gamma + MB$$

$$\gamma + M\Gamma < \beta + MB$$

2.

Αν Ρ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ , να δείξετε ότι $\tau < PA + PB + P\Gamma < 2\tau$, όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.



Προτεινόμενη λύση

- Στο τρίγωνο ΡΑΒ : $AB < PA + PB$
  Στο τρίγωνο ΡΑΓ : $A\Gamma < PA + P\Gamma$
  Στο τρίγωνο ΡΒΓ : $B\Gamma < PB + P\Gamma$

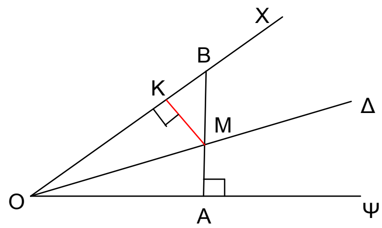
  Προσθέτουμε κατά μέλη : $AB + A\Gamma + B\Gamma < 2PA + 2PB + 2P\Gamma$
  $2\tau < 2(PA + PB + P\Gamma)$
  $\tau < PA + PB + P\Gamma$

- Από γνωστή εφαρμογή έχουμε $PB + P\Gamma < AB + A\Gamma$
  $PA + P\Gamma < AB + B\Gamma$
  $PA + PB < A\Gamma + B\Gamma$

  Προσθέτουμε κατά μέλη : $2PA + 2PB + 2P\Gamma < 2AB + 2A\Gamma + 2B\Gamma$
  $PA + PB + P\Gamma < AB + A\Gamma + B\Gamma$
  $PA + PB + P\Gamma < 2\tau$

3.

Δίνεται γωνία $X\hat{O}\Psi$ και σημείο Μ της διχοτόμου της ΟΔ . Από το Μ φέρνουμε την $MA \perp O\Psi$ και έστω Β το σημείο τομής της ΜΑ με την ΟΧ . Να δείξτε ότι $MA < MB$.



Προτεινόμενη λύση

Φέρουμε $MK \perp OX$.

Τότε $MA = MK$ **(1)**

Στο ορθογώνιο τρίγωνο Μ ΚΒ είναι $MK < MB$

Η (1) γίνεται $MA < MB$

4.

Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με **i)** $\beta = \dfrac{\alpha}{3}$ και $\gamma = \dfrac{3\alpha}{5}$;

ii) $\alpha = \dfrac{7\gamma}{5}$ και $\beta = \dfrac{\gamma}{3}$;

Δικαιολογήστε την απάντηση σας

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\beta + \gamma = \frac{\alpha}{3} + \frac{3\alpha}{5} = \frac{5\alpha}{15} + \frac{9\alpha}{15} = \frac{14\alpha}{15} < \alpha$$

Δηλαδή $\beta + \gamma < \alpha$ που είναι άτοπο. Οπότε δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

ii)

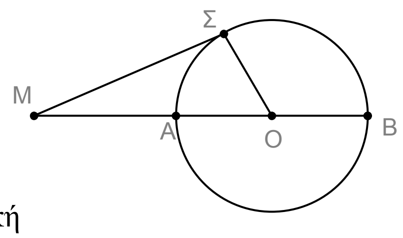
$$\alpha - \beta = \frac{7\gamma}{5} - \frac{\gamma}{3} = \frac{21\gamma}{15} - \frac{5\gamma}{15} = \frac{16\gamma}{15} > \gamma$$

Δηλαδή $\alpha - \beta > \gamma$ που είναι άτοπο. Οπότε δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

5.

Έστω κύκλος (Ο, ρ) και εξωτερικό του σημείο Μ. Η ΜΟ τέμνει τον κύκλο στα Α και Β, με το Α μεταξύ των Μ και Ο. Αποδείξτε ότι η ΜΑ είναι η ελάχιστη απόσταση του Μ από τα σημεία του κύκλου και η ΜΒ η μέγιστη.

Προτεινόμενη λύση



Έστω Σ το τυχαίο σημείο του κύκλου.
Θα αποδείξουμε ότι $ΜΑ \le ΜΣ \le ΜΒ$
Όταν το Σ ταυτίζεται με το Α, τότε $ΜΣ = ΜΑ$.
Και όταν το Σ ταυτίζεται με το Β, τότε $ΜΣ = ΜΒ$.

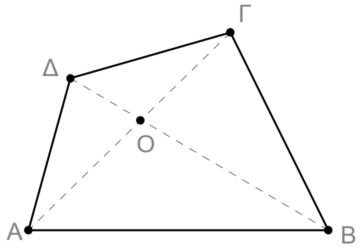
Για οποιαδήποτε άλλη θέση του Σ, από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΜΣΟ έχουμε

$$ΜΟ - ΣΟ < ΜΣ < ΜΟ + ΣΟ$$
$$ΜΟ - ΟΑ < ΜΣ < ΜΟ + ΟΒ$$
$$ΜΑ < ΜΣ < ΜΒ$$

Επομένως για οποιαδήποτε θέση του Σ έχουμε $ΜΑ \le ΜΣ \le ΜΒ$

6.

Σε κάθε τετράπλευρο ΑΒΓΔ δείξτε ότι $\tau < ΑΓ + ΒΔ < 2\tau$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τετραπλεύρου



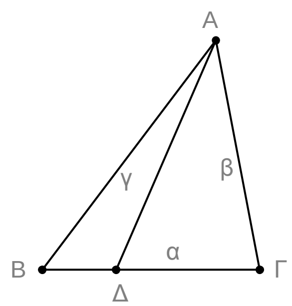
Προτεινόμενη λύση

- Στο τρίγωνο ΑΒΓ : $ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ$
  Στο τρίγωνο ΑΔΓ : $ΑΓ < ΑΔ + ΔΓ$
  Στο τρίγωνο ΑΒΔ : $ΒΔ < ΑΒ + ΑΔ$
  Στο τρίγωνο ΒΔΓ : $ΒΔ < ΒΓ + ΓΔ$
  Προσθέτουμε κατά μέλη : $2(ΑΓ + ΒΔ) < 2(ΑΒ + ΒΓ + ΑΔ + ΔΓ)$
  $ΑΓ + ΒΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΑΔ + ΔΓ$
  $ΑΓ + ΒΔ < 2\tau$

- Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων.
  Στο τρίγωνο ΟΑΒ : $ΑΒ < ΒΟ + ΟΑ$
  Στο τρίγωνο ΟΑΔ : $ΑΔ < ΟΔ + ΟΑ$
  Στο τρίγωνο ΟΔΓ : $ΔΓ < ΟΔ + ΟΓ$
  Στο τρίγωνο ΟΓΒ : $ΒΓ < ΟΒ + ΟΓ$
  Προσθέτουμε κατά μέλη : $ΑΒ + ΒΓ + ΑΔ + ΔΓ < 2[(ΟΑ + ΟΓ) + (ΟΒ + ΟΔ]$
  $2\tau < 2(ΑΓ + ΒΔ)$
  $\tau < ΑΓ + ΒΔ$

7.

Αν Δ είναι ένα σημείο της μικρότερης πλευράς α τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξτε ότι $ΑΔ > \dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$



Προτεινόμενη λύση

Επειδή η α είναι η μικρότερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι $\beta > ΔΓ$ και $\gamma > ΒΔ$.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ : $ΑΔ > \gamma - ΒΔ$

Στο τρίγωνο ΑΔΓ : $ΑΔ > \beta - ΔΓ$

Προσθέτουμε κατά μέλη : $2ΑΔ > \beta + \gamma - ΒΔ - ΔΓ$

$2ΑΔ > \beta + \gamma - (ΒΔ + ΔΓ)$

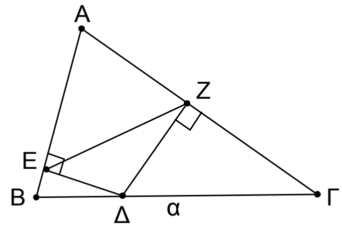
$2ΑΔ > \beta + \gamma - \alpha$

$ΑΔ > \dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$

8.

Αν Δ είναι σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ και E, Z οι προβολές του στις πλευρές AB, $A\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξτε ότι $EZ < B\Gamma$

Προτεινόμενη λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Delta$: $B\Delta > \Delta E$
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$: $\Delta\Gamma > \Delta Z$

Προσθέτουμε κατά μέλη : $B\Delta + \Delta\Gamma > \Delta E + \Delta Z$

$B\Gamma > \Delta E + \Delta Z$ **(1)**

Στο τρίγωνο $E\Delta Z$: $\Delta E + \Delta Z > EZ$ **(2)**

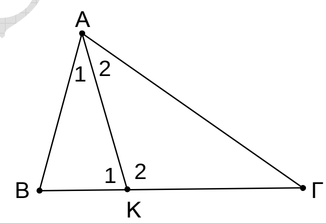
(1) + (2) $\Rightarrow$ $B\Gamma + \Delta E + \Delta Z > \Delta E + \Delta Z + EZ$

$B\Gamma > EZ$

9.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του AK. Δείξτε ότι $AB > BK$ και $A\Gamma > \Gamma K$

Προτεινόμενη λύση



Στο τρίγωνο ABK η γωνία $\widehat{K}_2$ είναι εξωτερική άρα

Είναι $\widehat{K}_2 > \widehat{A}_1$ σαν εξωτερική του τριγώνου ABK

Άρα $\widehat{K}_2 > \widehat{A}_2$

Οπότε, στο τρίγωνο $AK\Gamma$ θα είναι $A\Gamma > K\Gamma$

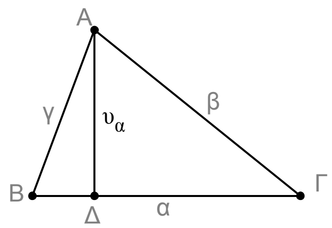
Ομοίως ………………………… $AB > BK$

10.

Δείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\upsilon_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$ και στη συνέχεια ότι

$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < 2\tau$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου

Προτεινόμενη λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$: $\upsilon_\alpha < \gamma$
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$: $\upsilon_\alpha < \beta$

Προσθέτουμε : $2\upsilon_\alpha < \beta + \gamma$

$$\upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2} \quad \textbf{(1)}$$

Κυκλικά $$\upsilon_\beta < \frac{\alpha+\gamma}{2} \quad \textbf{(2)}$$

και $$\upsilon_\gamma < \frac{\beta+\alpha}{2} \quad \textbf{(3)}$$

(1) + (2) + (3) : $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha + \beta + \gamma$

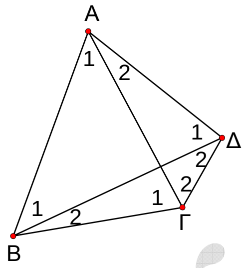
$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < 2\tau$

11.

Σε κυρτό τετράπλευρο μεγαλύτερη πλευρά είναι η ΑΒ και μικρότερη η ΓΔ.

Δείξτε ότι $\hat{A} < \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} < \hat{\Delta}$

Προτεινόμενη λύση



Επειδή η ΔΓ είναι η μικρότερη πλευρά του τετραπλεύρου , στο τρίγωνο ΑΔΓ θα είναι

$$\Delta\Gamma < A\Delta \quad \Rightarrow \quad \hat{A}_2 < \hat{\Gamma}_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης αφού η ΑΒ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τετραπλεύρου , στο τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι

$$B\Gamma < AB \quad \Rightarrow \quad \hat{A}_1 < \hat{\Gamma}_1 \qquad \textbf{(2)}$$

$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad \hat{A}_2 + \hat{A}_1 < \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{A} < \hat{\Gamma}$$

Ομοίως δουλεύοντας στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ αποδεικνύουμε ότι $\hat{B} < \hat{\Delta}$

12.

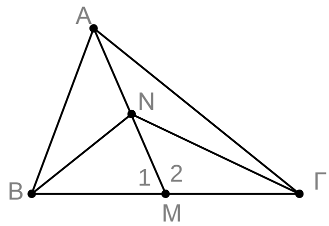
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διάμεσος του ΑΜ . Αν Ν τυχαίο σημείο της διαμέσου , να δείξετε ότι

i) $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$

ii) ΝΓ > ΝΒ

Προτεινόμενη λύση

i)



Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ έχουν ΑΜ κοινή
ΒΜ = ΜΓ και
ΑΓ > ΑΒ

Οπότε $\hat{M}_2 > \hat{M}_1$

ii)

Τα τρίγωνα ΝΒΜ και ΝΜΓ έχουν ΝΜ κοινή
ΒΜ = ΜΓ και
$\hat{M}_2 > \hat{M}_1$

Οπότε ΝΓ > ΝΒ