5^{η} Δεκάδα θεμάτων επανάληψης

41.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε , Μ τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα Οι προεκτάσεις των τμημάτων ΕΜ και ΔΓ τέμνονται στο Ζ . Να αποδείξετε ότι

i) Τα τρίγωνα ΒΜΕ και ΓΜΖ είναι ίσα

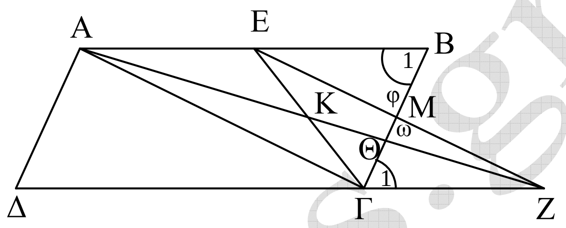
ii) Το τετράπλευρο ΑΕΖΓ είναι παραλληλόγραμμο

iii) Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΓ τότε

α) Το Θ είναι κέντρο βάρους του τριγώνου ΕΓΖ

β) $\Gamma\Theta = \dfrac{B\Gamma}{3}$

Προτεινόμενη λύση



i)

$\Gamma M = MB$, $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}_1$

ii)

Είναι ΑΕ // ΓΖ και

από το **(i)** $\Rightarrow \Gamma Z = EB = AE$

άρα ΑΕ =// ΓΖ οπότε ΑΕΖΓ παραλληλόγραμμο

iii)

Κ κέντρο του παραλληλόγραμμου ΑΕΖΓ άρα Κ μέσο του ΕΓ συνεπώς ΖΚ διάμεσος του τριγώνου ΕΓΖ **(1)** επίσης από το **(i)** ΕΜ = ΜΖ άρα και ΓΜ διάμεσος του τριγώνου ΕΓΖ **(2)**

από τις (1) και (2) $\Rightarrow$ Θ κέντρο βάρους του ΕΓΖ

iv)

Από το **(iii)** $\Rightarrow \Gamma\Theta = \dfrac{2}{3}\Gamma M$ και $\Gamma M = \dfrac{1}{2}B\Gamma$ άρα $\Gamma\Theta = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}B\Gamma = \dfrac{1}{3}B\Gamma$

42 .

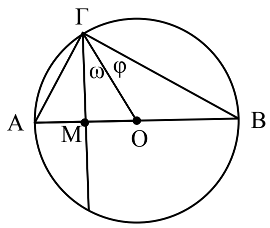
Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και μία διάμετρος του ΑΒ . Φέρουμε την μεσοκάθετο στην ΟΑ Που τέμνει την ΟΑ στο Μ και τον κύκλο στο Γ . Δείξτε ότι

i) Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο

ii) Η ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΓΒ

iii) ΒΓ = 2ΓΜ

Προτεινόμενη λύση



i)

ΓΜ μεσοκάθετος στο ΑΟ $\Rightarrow$

ΓΑ = ΓΟ = ρ = ΟΑ άρα το

ΑΓΟ ισόπλευρο

ii)

ΑΓΟ ισόπλευρο και ΓΜ μεσοκάθετος άρα και διχοτόμος οπότε $\hat{\omega} = 30^o$

ΟΓ = ΟΒ οπότε $\hat{\varphi} = \hat{B}$ και επειδή το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ορθογώνιο

(Α$\hat{\Gamma}$Β εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο) με $\hat{A} = 60^o$ θα είναι $\hat{B} = 30^o = \hat{\varphi}$

Αφού $\hat{\omega} = 30^o = \hat{\varphi}$ η ΓΟ διχοτόμος

iii)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΜΒ $\hat{B} = 30^o$ άρα ΓΜ = $\frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow$ ΒΓ = 2ΓΜ

43 .

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η βάση ΔΓ είναι διπλάσια από την βάση ΑΒ . Έστω Ζ , Η τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα . Δείξτε ότι

i) $ZH = \dfrac{3AB}{2}$

ii) Αν Ε μέσο του ΔΓ τότε το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο

iii) Αν η ΖΗ τέμνει τα ΑΕ και ΒΕ στα Θ, Ι αντίστοιχα τότε $\Theta I = \dfrac{\Delta\Gamma}{4}$ και Ι μέσο του ΘΗ

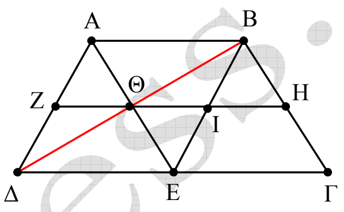
iv) Τα τμήματα ΑΕ , ΖΙ , ΒΔ συντρέχουν

Προτεινόμενη λύση

i)

ΖΗ διάμεσος άρα

$$ZH = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB+2AB}{2} = \frac{3AB}{2}$$



ii)

ΑΒ = // ΕΓ άρα ΑΒΓΕ παραλληλόγραμμο

iii)

Ζ μέσο του ΑΔ και ΖΘ // ΔΓ άρα Θ μέσο του ΑΕ και ομοίως Ι μέσο του ΒΕ οπότε

$\Theta I = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\frac{\Gamma\Delta}{2}}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta}{4}$ ομοίως $IH = \dfrac{E\Gamma}{2} = \dfrac{\frac{\Gamma\Delta}{2}}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta}{4}$ άρα ΘΙ= ΙΗ

iv)

Το ΑΒΕΔ παραλληλόγραμμο και Θ μέσο της διαγωνίου του ΑΕ άρα Θ κέντρο αυτού από το οποίο διέρχεται και η διαγώνιος ΒΔ

44.

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ στις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $\text{ΑΔ} = \frac{1}{3}\text{ΑΒ}$ και $\text{ΑΕ} = \frac{1}{3}\text{ΑΓ}$ και ονομάζουμε Μ το μέσο του τμήματος ΔΕ . Δείξτε ότι

i) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές

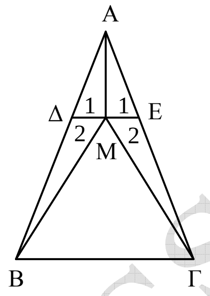
ii) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Α

iii) Το ΔΕ Γ Β είναι ισοσκελές τραπέζιο

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} \\ \text{ΑΔ} = \frac{1}{3}\text{ΑΒ} \\ \text{ΑΕ} = \frac{1}{3}\text{ΑΓ} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΑΔ} = \text{ΑΕ} \text{ και } \text{ΔΒ} = \text{ΕΓ}$$



$\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ} \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\text{Ε}}_1$ άρα και $\hat{\Delta}_2 = \hat{\text{Ε}}_2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΒΔ} = \text{ΕΓ} \\ \text{ΔΜ} = \text{ΜΕ} \\ \hat{\Delta}_2 = \hat{\text{Ε}}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{\text{ΔΒΜ}} = \overset{\triangle}{\text{ΜΕΓ}} \text{ άρα ΒΜ} = \text{ΜΓ} \Rightarrow \text{ΒΜΓ ισοσκελές}$$

ii)

$$\left.\begin{array}{r} \text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} \\ \text{ΑΜ} = \text{ΑΜ} \\ \text{από (i) } \text{ΒΜ} = \text{ΜΓ} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{\text{ΑΒΜ}} = \overset{\triangle}{\text{ΑΜΓ}} \text{ άρα } \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Μ} = \text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Γ} \Rightarrow \text{ΑΜ διχοτόμος}$$

iii)

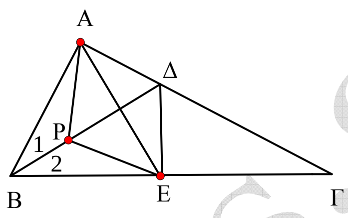
Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοσκελή με κοινή την γωνία της κορυφής τους $\hat{\text{Α}}$ οπότε θα έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες άρα $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Μ} = \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} \Leftrightarrow \text{ΔΕ} // \text{ΒΓ}$ συνεπώς το ΔΕΓΒ τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές διότι ΒΔ = ΓΕ

45.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = \dfrac{B\Gamma}{2}$, $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$.Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΓ στο Δ .Από το Δ φέρω την $\Delta E \perp B\Gamma$. Δείξτε ότι

i) Το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές
ii) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ είναι ίσα
iii) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α
iv) Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ
v) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο
vi) Αν Ρ τυχαίο σημείο του ΒΔ τότε το τρίγωνο ΡΑΕ είναι ισοσκελές

Προτεινόμενη λύση



i)

$\hat{B} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\hat{B}}{2} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$ άρα

ΒΔΓ ισοσκελές με ΒΔ = ΔΓ

ii)
ΒΔΓ ισοσκελές με ΒΔ = ΔΓ και ΔΕ ύψος του άρα ΔΕ διάμεσος οπότε

$BE = \dfrac{B\Gamma}{2} = AB$, ΒΔ = ΒΔ και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ είναι ίσα

iii)
Από το **(ii)** έχουμε $\hat{A} = \Delta\hat{E}B = 90^o$ συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α

iv)
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow$
$\hat{\Gamma} = 30^o$ οπότε $\hat{B} = 60^o$ και $\hat{A} = 90^o$

v)
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ είναι $\hat{B} = 60^o$ οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο

vi)
Στο ισοπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ η ΒΔ είναι διχοτόμος άρα και μεσοκάθετος στο ΑΕ

οπότε ΡΑ = ΡΕ $\Leftrightarrow$ το τρίγωνο ΡΑΕ είναι ισοσκελές

46.

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρνουμε τμήμα ΑΡ ⊥ ΒΔ και στην προέκταση του ΑΡ παίρνουμε τμήμα ΡΕ = ΑΡ . Δείξτε ότι

i) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές

ii) ΓΕ// ΒΔ

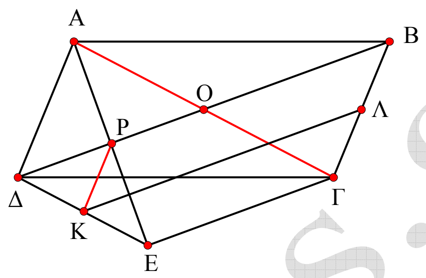
iii) Το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο

iv) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο

v) Αν ΚΛ είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΒΓΕΔ τότε ΒΡ = ΚΛ

Προτεινόμενη λύση

i)



Στο τρίγωνο ΔΑΕ η ΔΡ είναι διάμεσος και ύψος άρα το ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ΔΑ = ΔΕ

ii)

Φέρω την διαγώνιο ΑΓ τότε

Ρ μέσο του ΑΕ και Ο μέσο του ΑΓ

αρα ΡΟ // ΕΓ συνεπώς ΒΔ // ΓΕ

iii)

Επειδή ΓΕ //ΒΔ το ΒΓΕΔ είναι τραπέζιο όμως

ΒΓ = ΑΔ = ΔΕ άρα το τραπέζιο είναι ισοσκελές

iv)

Επειδή ΡΟ ⊥ ΑΕ και ΕΓ // ΡΟ θα είναι ΓΕ ⊥ ΑΕ άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο

v)

Ρ μέσο του ΑΕ και Κ μέσο του ΔΕ άρα ΡΚ = // $\frac{ΑΔ}{2}$ = // $\frac{ΒΓ}{2}$ = // ΒΛ επομένως το ΒΛΚΡ παραλληλόγραμμο άρα ΒΡ = ΚΛ

47.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) και η διχοτόμος ΒΔ αυτού .Φέρω την ΔΕ ⊥ ΒΓ . Η προέκταση της ΔΕ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Ζ .Δείξτε ότι

i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ είναι ίσα

ii) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισοσκελές

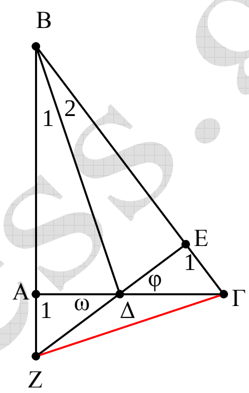
iii) ΒΔ ⊥ ΖΓ

iv) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο

Προτεινόμενη λύση

i)

Ορθογώνια με ΒΔ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$



ii)

Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΔΕΓ είναι ίσα διότι

$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = 90^o$, ΑΔ = ΔΕ από το **(i)** και $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$

Άρα ΑΖ = ΕΓ επειδή όμως από το **(i)**

προκύπτει ότι ΑΒ = ΒΕ θα είναι

ΑΒ + ΑΖ = ΒΕ + ΕΓ ⇔ ΒΖ = ΒΓ ⇔

ΒΖΓ ισοσκελές

iii)

Στο ισοσελές τρίγωνο ΒΖΓ η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής άρα και ύψος δηλαδή ΒΔ ⊥ ΖΓ

iv)

$B\hat{A}\Delta + B\hat{E}\Delta = 180^o$ άρα το ΑΔΕΒ εγγράψιμο

48.

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{A} = 120^o$ και η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$ διέρχεται από το μέσο Ε της ΑΒ . Φέρω τμήμα ΑΗ $\perp$ ΔΓ Δείξτε ότι

i) $A\Delta = \dfrac{AB}{2}$ **ii)** $\Delta H = \dfrac{\Gamma\Delta}{4}$ **iii)** $AH = \dfrac{\Delta E}{2}$ **iv)** $\Delta\hat{E}\Gamma = 90^o$

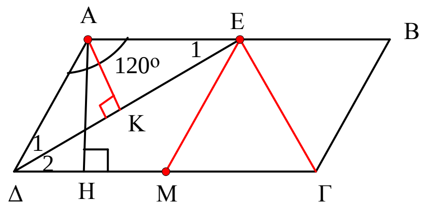
Προτεινόμενη λύση

i)

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ και $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ άρα

$\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1 \Leftrightarrow$ ΑΔΕ ισοσκελές οπότε

$A\Delta = AE = \dfrac{AB}{2}$



ii)

Αφού $\widehat{A} = 120^o$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ θα είναι $\hat{\Delta}_1 = 30^o$ οπότε $A\hat{\Delta}H = 60^o$ συνεπώς $\Delta\hat{A}H = 30^o$

Άρα $\Delta H = \dfrac{A\Delta}{2} = \dfrac{\frac{AB}{2}}{2} = \dfrac{AB}{4} = \dfrac{\Gamma\Delta}{4}$

iii)

Φέρω ΑΚ $\perp$ ΔΕ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ η ΑΚ ύψος άρα και διάμεσος

τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΔ και ΑΔΗ έχουν την ΑΔ κοινή και $\Delta\hat{A}K = 60^o = A\hat{\Delta}H$

άρα είναι ίσα οπότε $AH = \Delta K = \dfrac{\Delta E}{2}$

iv)

Έστω Μ το μέσο της ΔΓ τότε

ΑΕ = // ΔΜ $\Rightarrow$ ΑΕΜΔ παραλληλόγραμμο $\Rightarrow$ ΕΜ = ΑΔ

Στο τρίγωνο ΔΕΓ η διάμεσος $EM = A\Delta = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma}{2}$ άρα ΔΕΓ ορθογώνιο στο Ε

49.

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, ΑΒ = 3α , ΓΔ = 4α και Ε , Ζ μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα

i) Να υπολογιστεί το μήκος του ΕΖ συναρτήση του α

ii) Αν ΒΗ είναι ύψος του τραπεζίου να υπολογιστούν τα μήκη των ΒΓκαι ΗΖ συναρτήσει του α

iii) Αν η προέκταση της ΔΖ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Κ

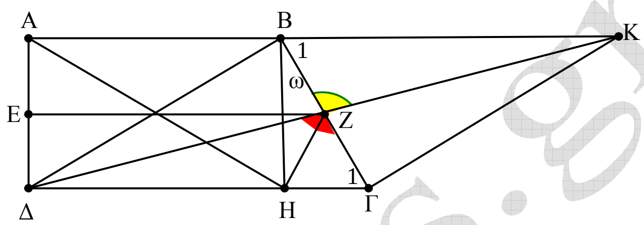
α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΚΓ

β) Το ΑΚΓΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο

Προτεινόμενη λύση

i)

$$EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{7\alpha}{2}$$



ii)

$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ και

Λόγω της υπόθεσης

$2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^o$

Οπότε $\hat{\omega} = 30^o$ συνεπώς $H\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2H\Gamma$ όμως

ΑΒ = 3α και από το ορθογώνιο ΑΒΗΔ θα είναι ΔΗ = ΑΒ = 3α επομένως

$H\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta H = 4\alpha - 3\alpha = \alpha$ άρα $B\Gamma = 2\alpha$ και $HZ = \dfrac{B\Gamma}{2} = \alpha$

iii)

$BZ = Z\Gamma$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}_1$ και $B\hat{Z}K = \Delta\hat{Z}\Gamma \Rightarrow$ ότι τα τρίγωνα ΒΖΚ και ΔΖΓ είναι ίσα

επομένως ΒΚ = ΔΓ και αφού επιπλέον είναι ΒΚ // ΔΓ το ΒΚΓΔ είναι

παραλληλόγραμμο οπότε ΔΒ = ΚΓ

iv)

Το ΑΚΓΗ είναι τραπέζιο και επειδή ΚΓ = ΒΔ = ΑΗ

(οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες) το τραπέζιο είναι ισοσκελές

50.

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την διαγώνιο ΒΔ κατά τμήμα ΔΕ = ΒΔ , έστω Ζ το μέσο της πλευράς ΑΔ και Η το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΔ . Δείξτε ότι

i) $ΔΗ = \frac{ΑΔ}{2}$

ii) ΓΖ = ΑΗ

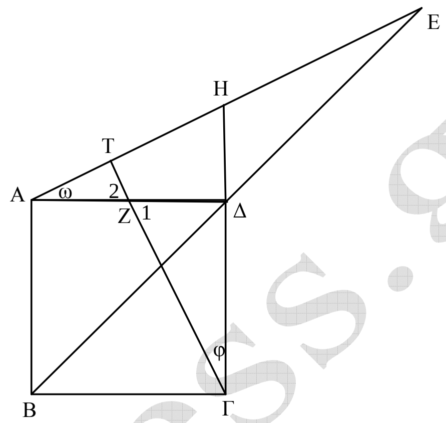
iii) $ΓΖ \perp ΑΕ$

Προτεινόμενη λύση

i)

Δ , Η μέσα των ΒΕ , ΑΕ άρα

$ΗΔ = \frac{ΑΒ}{2} \overset{ΑΒ = ΑΔ}{=} \frac{ΑΔ}{2}$



ii)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ έχουν ΑΔ = ΔΓ και ΔΗ = ΔΖ

Άρα είναι ίσα οπότε ΓΖ = ΑΗ

iii)

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ

είναι ίσα θα είναι $\hat{φ} = \hat{ω}$ όμως και $\hat{Ζ}_1 = \hat{Ζ}_2$ ως κατακορυφήν συνεπώς

και οι τρίτες γωνίες των τριγώνων ΑΤΖ και ΖΔΓ είναι ίσες άρα $\hat{Τ} = Ζ\hat{Δ}Γ = 90^o$

συνεπώς $ΓΖ \perp ΑΕ$