

2.4 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Κλασματική εξίσωση : Ονομάζουμε κλασματική εξίσωση κάθε εξίσωση η οποία έχει τον άγνωστο σ' έναν τουλάχιστον παρονομαστή.

ΣΧΟΛΙΟ

Διαδικασία επίλυσης :

- i) Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενα παραγόντων
- ii) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π και βάζουμε περιορισμούς (Ε. Κ. Π $\neq 0$)
- iii) Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το Ε. Κ. Π
- iv) Απλοποιούμε τους παρονομαστές
- v) Κάνουμε όλες τις πράξεις και λύνουμε την εξίσωση που θα βρούμε
- vi) Απορρίπτουμε τις λύσεις που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Η εξίσωση $\frac{x^2 - 4}{x + 2} + 3x = -10$ έχει λύση την $x = -2$ Λ

β) Οι εξισώσεις $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0$ και $x^2 - 5x + 6 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις Λ

γ) Η εξίσωση $\frac{3}{x + 2} + \frac{6}{x - 2} = 4 + \frac{3}{x}$ ορίζεται όταν $x \neq 2$ και $x \neq -2$ Λ

δ) Η εξίσωση $\frac{x + 1}{5x + 2} + \frac{3x}{x + 2} = -3$ έχει ρίζα το -1 Σ

ε) Στην εξίσωση $\frac{3}{x - 4} + \frac{x + 1}{x + 2} = 3$ κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών βρίσκουμε $3(x + 2) + (x + 1)(x - 4) = 3$ Λ

στ) Οι εξισώσεις $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = 5$ και $2x^2 + 3x + 1 = 5(x^2 - 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις Λ

Προτεινόμενη λύση

α)

Η εξίσωση δεν ορίζεται για $x = -2$ οπότε δεν μπορεί να έχει ρίζα το -2
Άρα η πρόταση είναι λάθος

β)

Όχι διότι η πρώτη γίνεται $x^2 - 5x + 6 = 0$ και $x \neq 2$. Άρα η πρόταση είναι λάθος

γ)

Η εξίσωση ορίζεται όταν $x \neq 2$ και $x \neq -2$ και $x \neq 0$. Άρα η πρόταση είναι λάθος

δ)

Η εξίσωση για $x = -1$ γίνεται $-3 = -3$. Άρα η πρόταση είναι σωστή

ε)

Η απαλοιφή των παρονομαστών δίνει $3(x + 2) + (x + 1)(x - 4) = 3(x - 4)(x + 2)$

Άρα η πρόταση είναι λάθος

στ)

Όχι διότι η πρώτη δεν ορίζεται για $x = -1$, ενώ η δεύτερη έχει ρίζα το -1

Άρα η πρόταση είναι λάθος

2.

Στις παρακάτω ερωτήσεις επιλέξτε την σωστή απάντηση

α) Η εξίσωση $\frac{x^3 - 9x}{(x - 3)(x + 3)} = 0$ έχει λύσεις

A) το 3 και το -3

B) το 0, το 3 και το -3

Γ) το 0 μόνο

Δ) είναι αδύνατη

β) Η εξίσωση $\frac{x - 1}{x - 3} + 2x = 3$ ορίζεται όταν

A) $x \neq -2$

B) $x \neq 3$

Γ) $x \neq -2$ και $x \neq 3$

Δ) $x \neq -2$ και $x \neq 1$

γ) Η εξίσωση $\frac{5x}{x - 3} + 3x - 4 = \frac{4}{x + 3}$ ορίζεται όταν

$\frac{x - 1}{x - 1}$

A) $x \neq -3$

B) $x \neq 1$

Γ) $x \neq -3$ και $x \neq 0$

Δ) $x \neq -3$ και $x \neq 1$ και $x \neq 3$

Προτεινόμενη λύση

α)

Με $x \neq 3$ και $x \neq -3$ η εξίσωση γίνεται $\frac{x^3 - 9x}{(x - 3)(x + 3)} = 0$

$$\frac{x(x^2 - 9)}{(x - 3)(x + 3)}$$

$$\frac{x(x^2 - 9)}{(x - 3)(x + 3)} = 0$$

$$\frac{x(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = 0 \quad \text{άρα } x = 0$$

Επομένως σωστό το Γ

β)

Πρέπει να ισχύουν $x + 2 \neq 0$ και $x - 3 \neq 0$ δηλαδή $x \neq -2$ και $x \neq 3$
Επομένως σωστό το Γ

γ)

Πρέπει να ισχύουν $x - 1 \neq 0$ και $x + 3 \neq 0$ και $\frac{x-3}{x-1} \neq 0$ δηλαδή

$$x \neq 1 \text{ και } x \neq -3 \text{ και } x \neq 3$$

Επομένως σωστό το Δ

3.

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\alpha) \frac{2x^2 + 6}{x^2 - 4} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+5}{x-2}$$

$$\beta) \frac{25}{4x^2 - 1} - \frac{1}{27} = \frac{13-x}{2x-1}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

Είναι $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

Ε.Κ.Π. = $(x-2)(x+2) \neq 0$ άρα $(x-2)(x+2) \neq 0$

$$x-2 \neq 0 \text{ και } x+2 \neq 0$$

$$x \neq 2 \text{ και } x \neq -2$$

Η εξίσωση γίνεται

$$\frac{2x^2 + 6}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+5}{x-2}$$

$$(x-2)(x+2) \frac{2x^2 + 6}{(x-2)(x+2)} - (x-2)(x+2) \frac{x-1}{x+2} = (x-2)(x+2) \frac{x+5}{x-2}$$

$$(2x^2 + 6) - (x-2)(x-1) = (x+2)(x+5)$$

$$2x^2 + 6 - x^2 + x + 2x - 2 = x^2 + 5x + 2x + 10$$

$$-4x - 6 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

β)

Είναι $4x^2 - 4 = (2x)^2 - 1^2 = (2x+1)(2x-1)$

Ε.Κ.Π. = $27(2x+1)(2x-1) \neq 0$ άρα $2x+1 \neq 0$ και $2x-1 \neq 0$

$$2x \neq -1 \text{ και } 2x \neq 1$$

$$x \neq -\frac{1}{2} \text{ και } x \neq \frac{1}{2} \text{ τότε}$$

Η εξίσωση γίνεται

$$\frac{25}{(2x+1)(2x-1)} - \frac{1}{27} = \frac{13-x}{2x-1}$$

$$27(2x+1)(2x-1) \frac{25}{(2x+1)(2x-1)} - 27(2x+1)(2x-1) \frac{1}{27} = 27(2x+1)(2x-1) \frac{13-x}{2x-1}$$

$$27 \cdot 25 - (2x+1)(2x-1) = 27(2x+1)(13-x)$$

μετά από πράξεις τελικά έχουμε

$$50x^2 - 675x + 325 = 0$$

$$2x^2 - 27x + 13 = 0$$

$$\Delta = 625 \text{ και ρίζες } x = 13, x = \frac{1}{2}.$$

Η ρίζα $x = \frac{1}{2}$ όμως απορρίπτεται αφού δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς

4.

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\alpha) \frac{94-x^2}{49-x^2} = \frac{4x+1}{x+7} - \frac{2x+1}{x-7} \quad \beta) \frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{x^2+2x-3}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$49 - x^2 = 7^2 - x^2 = (7-x)(7+x)$$

$$\text{Ε. Κ. Π} = (7-x)(7+x) \neq 0 \quad \text{άρα } \begin{matrix} 7-x \neq 0 & \text{και} & 7+x \neq 0 \\ x \neq 7 & & \text{και} & x \neq -7 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Η εξίσωση γίνεται} \quad \frac{94-x^2}{(7-x)(7+x)} &= \frac{4x+1}{x+7} + \frac{2x+1}{7-x} \\ (7-x)(7+x) \frac{94-x^2}{(7-x)(7+x)} &= (7-x)(7+x) \frac{4x+1}{x+7} + (7-x)(7+x) \frac{2x+1}{7-x} \\ (94-x^2) &= (7-x)(4x+1) + (7+x)(2x+1) \\ x^2 - 42x + 80 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1444 \text{ και ρίζες } x = 2, x = 40 \text{ που είναι και οι δύο δεκτές}$$

β)

Οι ρίζες του παρανομαστή τριώνυμο είναι $-3, 1$

$$\text{Άρα } x^2 - 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

$$\text{Ε. Κ. Π} = (x+3)(x-1) \neq 0 \quad \text{άρα } \begin{matrix} x+3 \neq 0 & \text{και} & x-1 \neq 0 \\ x \neq -3 & & \text{και} & x \neq 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Η εξίσωση γίνεται} \quad \frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} &= \frac{4}{(x+3)(x-1)} \\ (x+3)(x-1) \frac{x+2}{x+3} - (x+3)(x-1) \frac{x+1}{x-1} &= (x+3)(x-1) \frac{4}{(x+3)(x-1)} \\ (x-1)(x+2) - (x+3)(x+1) &= 4 \\ -3x - 9 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Λύση που απορρίπτεται λόγω των περιορισμών, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

5.

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\alpha) \frac{2x^2+4}{x^2-4} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\beta) \frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{-3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$$

Προτεινόμενη λύσηΕίναι $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ Ε.Κ.Π. = $(x-2)(x+2) \neq 0$ άρα $(x-2)(x+2) \neq 0$

$$x-2 \neq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \neq 0$$

$$x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq -2$$

Η εξίσωση γίνεται

$$\frac{2x^2+4}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$(x-2)(x+2) \frac{2x^2+4}{(x-2)(x+2)} - (x-2)(x+2) \frac{x-1}{x+2} = (x-2)(x+2) \frac{x+1}{x-2}$$

$$2x^2+4 - (x-2)(x-1) = (x+2)(x+1)$$

μετά από πράξεις η εξίσωση γίνεται

$$0x = 0$$

Επομένως η εξίσωση αληθεύει για όλες τις τιμές του x εκτός των -2 και 2 λόγω των περιορισμών.**β)**Ε.Κ.Π. = $(x-1)(x+1) \neq 0$ άρα $(x-1)(x+1) \neq 0$

$$x-1 \neq 0 \quad \text{και} \quad x+1 \neq 0$$

$$x \neq 1 \quad \text{και} \quad x \neq -1$$

Η εξίσωση γίνεται

$$(x+1)(x-1) \frac{x-2}{x+1} - (x+1)(x-1) \frac{1}{x-1} = (x+1)(x-1) \frac{-3}{x+1} - (x+1)(x-1) \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$(x-1)(x-2) - (x+1) = -3(x-1) - 2$$

$$x^2 - x - 2x + 2 - x - 1 = -3x + 1 - 2$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

 $\Delta = -7 < 0$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

6.

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\alpha) \frac{17x+9}{x^2-9} + \frac{19x-24}{x^2-6x+9} = \frac{9}{x-3}$$

$$\beta) \frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{2x-5}{x^2-x-12} = \frac{7x-10}{x^2-6x+8}$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\text{Είναι } x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$\text{Και } x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$\text{Ε.Κ.Π.} = (x-3)^2(x+3) \neq 0 \quad \text{άρα } \begin{matrix} x-3 \neq 0 & \text{και} & x+3 \neq 0 \\ x \neq 3 & & \text{και} & x \neq -3 \end{matrix}$$

$$\text{Η εξίσωση γίνεται } \frac{17x+9}{(x-3)(x+3)} + \frac{19x-24}{(x-3)^2} = \frac{9}{x-3}$$

$$(x-3)^2(x+3) \frac{17x+9}{(x-3)(x+3)} + (x-3)^2(x+3) \frac{19x-24}{(x-3)^2} = (x-3)^2(x+3) \frac{9}{x-3}$$

$$(x-3)(17x+9) + (x+3)(19x-24) = 9(x-3)(x+3)$$

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 25 \quad \text{και ρίζες } x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{2}{3} \quad \text{που είναι δεκτές και οι δύο}$$

β)

$$\text{Οι παρανομαστές σε γινόμενο } x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

$$x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

$$\text{Ε.Κ.Π.} = (x-2)(x+3)(x-4) \neq 0 \quad \text{άρα } \begin{matrix} x-2 \neq 0 & \text{και} & x+3 \neq 0 & \text{και} & x-4 \neq 0 \\ x \neq 2 & & \text{και} & x \neq -3 & \text{και} & x \neq 4 \end{matrix}$$

$$\text{Η εξίσωση γίνεται } \frac{5x}{(x+3)(x-2)} + \frac{2x-5}{(x-4)(x+3)} = \frac{7x-10}{(x-4)(x-2)}$$

$$(x+3)(x-2)(x-4) \frac{5x}{(x+3)(x-2)} + (x+3)(x-2)(x-4) \frac{2x-5}{(x-4)(x+3)} =$$

$$(x+3)(x-2)(x-4) \frac{7x-10}{(x-4)(x-2)}$$

$$5x(x-4) + (x-2)(2x-5) = (x+3)(7x-10)$$

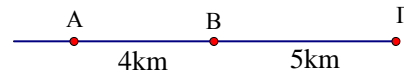
.....

$$-40x = -40 \quad \text{άρα}$$

$$x = 1 \quad \text{ρίζα που είναι δεκτή}$$

7.

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη διαδρομή ενός ποδηλάτη. Ο ποδηλάτης, από το σημείο



Α στο σημείο Β, κινείται με ταχύτητα 2km/h μικρότερη από την ταχύτητα με την οποία κινείται από το σημείο Β στο Γ. Κατά την επιστροφή από το Γ στο Α κινήθηκε με ταχύτητα ίση με το ημίαθροισμα των προηγούμενων ταχυτήτων. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινήθηκε κατά περίπτωση ο ποδηλάτης, αν ο χρόνος μετάβασης είναι ίσος με τον χρόνο επιστροφής.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι ο ποδηλάτης από το σημείο Β στο σημείο Γ κινήθηκε με ταχύτητα x km/h. Τότε από το Α στο Β κινήθηκε με ταχύτητα $(x - 2)$ km/h και από το Γ στο Α με

$$\text{ταχύτητα } \frac{x + x - 2}{2} = \frac{2x - 2}{2} = \frac{2(x - 1)}{2} = (x - 1) \text{ km/h}$$

Από τύπο της φυσικής, το διάστημα S που διανύεται σε χρόνο t με σταθερή ταχύτητα v είναι $S = vt$, οπότε $t = \frac{S}{v}$

Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, ο χρόνος μετάβασης από

$$\text{το Α στο Β ήταν } t_1 = \frac{4}{x - 2}$$

$$\text{από το Β στο Γ } t_2 = \frac{5}{x} \text{ και}$$

$$\text{από το Γ στο Α } t_3 = \frac{9}{x - 1}$$

$$\text{Αλλά } t_1 + t_2 = t_3, \text{ οπότε έχουμε την εξίσωση } \frac{4}{x - 2} + \frac{5}{x} = \frac{9}{x - 1}$$

$$\text{Ε.Κ.Π.} = x(x - 2)(x - 1) \neq 0 \text{ άρα } x \neq 0 \text{ και } x \neq 2 \text{ και } x \neq 1$$

$$\text{Η εξίσωση γίνεται } x(x - 2)(x - 1) \frac{4}{x - 2} + x(x - 2)(x - 1) \frac{5}{x} = x(x - 2)(x - 1) \frac{9}{x - 1}$$

$$4x(x - 1) + 5(x - 2)(x - 1) = 9x(x - 2)$$

$$x = 10 \text{ ρίζα δεκτή}$$

Επομένως ο ποδηλάτης κινήθηκε από το Α στο Β με ταχύτητα 8km / h,

από το Β στο Γ με ταχύτητα 10 km / h

και από το Γ στο Α με ταχύτητα 9 km / h

8.

Ένα ποταμόπλοιο κάνει τη διαδρομή $AB = 24$ km και την αντίστροφη αυτής BA συνολικά σε 5h. Από το A στο B κινείται παράλληλα με την ροή των νερών του ποταμού που η ταχύτητα τους είναι 2 km/h, ενώ από το B στο A κόντρα στην ροή. Να βρείτε την ταχύτητα του ποταμόπλοιου.

Προτεινόμενη λύση

Είναι φανερό πως αν x km/h είναι η ταχύτητα του ποταμόπλοιου, τότε από το A στο B κινείται με ταχύτητα $(x + 2)$ km/h, ενώ από το B στο A με ταχύτητα $(x - 2)$ km/h.

Ο χρόνος μετάβασης είναι $t_1 = \frac{24}{x+2}$ και ο χρόνος επιστροφής είναι $t_2 = \frac{24}{x-2}$

Με βάση το πρόβλημα είναι $t_1 + t_2 = 5$.

Άρα έχουμε την εξίσωση $\frac{24}{x+2} + \frac{24}{x-2} = 5$

ΕΚΠ $= (x-2)(x+2) \neq 0$ άρα $x \neq 2$ και $x \neq -2$

Η εξίσωση γίνεται $(x-2)(x+2) \frac{24}{x+2} + (x-2)(x+2) \frac{24}{x-2} = 5(x-2)(x+2)$
 $24(x-2) + 24(x+2) = 5(x^2-4)$
 $5x^2 - 48x - 20 = 0$

$\Delta = 2704$ και ρίζες $x_1 = 10$, $x_2 = -\frac{2}{5}$ δεκτή είναι η $x = 10$ km/h

9.

Ένας έμπορος αγόρασε ένα πλήθος CD και έδωσε 3000 €. Πούλησε μερικά και εισέπραξε 1800 € κερδίζοντας από κάθε CD 3 €. Επειδή του έμειναν 100 CD ακόμα, αναγκάστηκε να τα πουλήσει στην τιμή που τα είχε αγοράσει. Να βρείτε πόσο είχε αγοράσει το κάθε CD ο έμπορος

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι το κάθε CD ο έμπορος το αγόρασε x €. (Προφανώς είναι $x > 0$)

Τότε το πλήθος των CD που αγόρασε ήταν $\frac{3000}{x}$

Το πλήθος των CD που πούλησε ήταν $\frac{1800}{x+3}$

Επειδή μετά την πώληση του έμειναν 100 , έχουμε την εξίσωση

$$\frac{3000}{x} - \frac{1800}{x+3} = 100$$

$$x(x+3) \frac{3000}{x} - x(x+3) \frac{1800}{x+3} = 100x(x+3)$$

$$3000(x+3) - 1800x = 100x^2 + 300x$$

$$x^2 - 9x - 90 = 0$$

$\Delta = 441$ και ρίζες $x_1 = 15$, $x_2 = -6$ δεκτή είναι η $x_1 = 15$

Δηλαδή ο έμπορος αγόρασε το κάθε CD 15 €

10.

Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακεραίους έτσι, ώστε το πηλίκο του πρώτου προς τον δεύτερο αυξημένο κατά το πηλίκο του δεύτερου προς τον τρίτο να είναι ίσο με $\frac{7}{6}$

Προτεινόμενη λύση

Έστω x , $x + 1$, $x + 2$ οι τρεις διαδοχικοί ακεραίοι .

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε την εξίσωση $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{7}{6}$

ΕΚΠ = $6(x+1)(x+2) \neq 0$ άρα $x \neq -1$ και $x \neq -2$

Η εξίσωση γίνεται

$$6(x+1)(x+2) \frac{x}{x+1} + 6(x+1)(x+2) \frac{x+1}{x+2} = 6(x+1)(x+2) \frac{7}{6}$$

$$6x(x+2) + 6(x+1)^2 = 7(x+1)(x+2)$$

$$5x^2 + 3x - 8 = 0$$

$$\Delta = 169 \text{ και ρίζες } x_1 = 1, x_2 = -\frac{8}{5}$$

Από αυτές η $x_2 = -\frac{8}{5}$ απορρίπτεται αφού δεν είναι ακέραιος αριθμός

Για $x = 1$ οι τρεις ακεραίοι είναι $1, 2, 3$